Методы интегрирования

- Замена переменной

$$x = g(y) \Rightarrow dx = g'(y)dy \qquad y = g(x) \Rightarrow dy = g'(x)dx$$

$$\int f(x)dx = \int f\big(g(y)\big) \cdot g'(y)dy \qquad \int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)dx = \int f(y)dy$$

- Универсальная тригонометрическая (рационализирующая) замена

$$t = \tan\frac{x}{2} \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

- Интегрирование по частям

$$U = U(x), V = V(x)$$

$$\int UdV = UV - \int VdU$$

- Интегрирование рациональной функции $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \deg P(x) < \deg Q(x)$

Пояснение. Знаменатель $Q(x)$ раскладывается на линейные и квадратичные множители. Функция $f(x)$ представляется в виде суммы дробей (integration by partial fractions) с помощью метода неопределённых коэффициентов. Далее каждая из полученных дробей интегрируется, а результаты складываются.

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{\prod_i (a_i x + b_i)^{\alpha_i} \cdot \prod_j \big(c_j x^2 + d_j x + e_j\big)^{\beta_j}} =$$

$$= \sum_i \left(\sum_{k_i=1}^{\alpha_i} \frac{B_{k_i}}{(a_i x + b_i)^{k_i}} \right) + \sum_j \left(\sum_{m_j=1}^{\beta_j} \frac{D_{m_j} x + E_{m_j}}{\big(c_j x^2 + d_j x + e_j\big)^{m_j}} \right)$$

$$\int f(x)dx = \sum_i \left(\sum_{k_i=1}^{\alpha_i} \left(\int \frac{B_{k_i}}{(a_i x + b_i)^{k_i}} dx \right) \right) + \sum_j \left(\sum_{m_j=1}^{\beta_j} \left(\int \frac{D_{m_j} x + E_{m_j}}{\big(c_j x^2 + d_j x + e_j\big)^{m_j}} dx \right) \right)$$

- Некоторые табличные интегралы

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{|a|} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$$